Colégio Pedro II

Campus Engenho Novo II

Projeto Olimpíadas de Matemática

2013

Profs. Francisco Pereira e Liliana Costa

Coordenação: Profª Isabel Cristina G. Castro

Projeto Olimpíadas 2013 - Equipe de Matemática

Unidade I – Aritmética

Múltiplos de um nº Natural

Dado a $\in \mathbb{N}$, podemos considerar os múltiplos de a: 0 vezes a (nenhuma vez a), uma vez a, duas vezes a, três vezes a, etc., obtendo assim a sequência dos múltiplos de a:

$$0 \times a = 0 \,;\, 1 \times a = a \,;\, 2 \times a = a + a \,;\, 3 \times a = a + a + a \,;\, ...$$

Por exemplo, 0 dúzias, uma dúzia, duas dúzias, três dúzias etc., são os múltiplos de 12.
Outro exemplo é dado pelos múltiplos de 2: 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; ... os quais são chamados de números PARES. Um número que não é par é chamado de *ímpar*.

Note que o único múltiplo de 0 é próprio 0. Todos os números são múltiplos de 1 e de si próprios. Note também que, pela definição de múltiplo, qualquer múltiplo não nulo, isto é, diferente de zero, de um número $a > 0$ é sempre maior ou igual do que a. Assim, temos a seguinte propriedade importante:

$$\text{Se } a \times b = 0, \text{ então } a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Obs: Se um número natural n é múltiplo de a, então a é divisor de n.

Propriedade: Se a, b e c são três números naturais com $a < b$, então $a \times c < b \times c$.

Múltiplos Comuns

Um conceito importante é o de múltiplo comum de dois números.
Por exemplo, considere a sequência dos múltiplos de 3: 0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; ... e a sequência dos múltiplos de 5: 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; ...
Assim, a sequência dos números que são simultaneamente múltiplos de 3 e de 5 é: 0; 15; 30; 45; ...

Definição: O menor múltiplo comum não nulo de dois números naturais não nulos *a* e *b* é denotado por mmc(*a; b*) e será chamado de *mínimo múltiplo comum* de *a* e *b* (ou abreviadamente mmc).

Critérios de Multiplicidade (ou Divisibilidade)

Inicialmente, consideremos a tabela:

$2 \times 0 = 0$	$2 \times 5 = 10 = 10 + 0$
$2 \times 1 = 2$	$2 \times 6 = 12 = 10 + 2$
$2 \times 2 = 4$	$2 \times 7 = 14 = 10 + 4$
$2 \times 3 = 6$	$2 \times 8 = 16 = 10 + 6$
$2 \times 4 = 8$	$2 \times 9 = 18 = 10 + 8$

Note que todo número acima é um múltiplo de 10 somado com um dos números: 0, 2, 4, 6, ou 8.

<u>Critério de Multiplicidade de 2</u>: Um número é múltiplo de 2 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é par.

Critério de Multiplicidade de 5: Um número é múltiplo de 5 se, e somente se, o seu algarismo das unidades for 0 ou 5.

Critério de Multiplicidade de 10: Um número é múltiplo de 10 se, e somente se, o seu algarismo das unidades for 0.

Critério de Multiplicidade de 3 ou 9: Um número é múltiplo de 3 ou 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos for um múltiplo de 3 ou 9.

Critério de Multiplicidade de 11: Um número é múltiplo de 11 se, e somente se, a diferença entre as somas dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par é divisível por 11.

O Sistema Decimal

Os números naturais foram representados ao longo da história de vários modos distintos. O modo universalmente utilizado na atualidade é a representação decimal posicional. Esse sistema, variante do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônios há cerca de 1 700 anos antes de Cristo, foi desenvolvido na China e na Índia. Nesse sistema, todo número natural é representado por uma sequência formada pelos dez algarismos 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Por serem 10 esses algarismos, o sistema é chamado de decimal.

O sistema é também dito posicional, pois cada algarismo, além de seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função de sua posição dentro da sequência. Esse peso é uma potência de 10 e varia do seguinte modo:

O algarismo da extrema direita tem peso 100 = 1; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso 101 = 10; o seguinte tem peso 102 = 100; o seguinte tem peso 103 = 1 000 etc.

Assim, o número 1 458, no sistema decimal representa o número 1 x 103 + 4 x 102 + 5 x 10 + 8.

Obs: Os zeros à esquerda em um número são irrelevantes, pois por exemplo,

0231 = 0 x 103 + 2 x 102 + 3 x 10 + 1 = 2 x 102 + 3 x 10 + 1 = 231.

Números Primos

Os números primos são números especiais que desempenham um papel importante dentro da teoria e entre outras coisas os seus produtos representam todos os números naturais, como veremos ainda nesta seção.

Definição: Um número natural diferente de 0 e de 1 e que é apenas múltiplo de 1 e de si próprio é chamado de número primo. Um número diferente de 0 e de 1 que não é primo é chamado de número composto.

Note que a definição acima não classifica os números 0 e 1 nem como primos nem como compostos. Exceto esses dois números, todo número natural ou é primo ou é composto.

Obs: Euclides de Alexandria, em 300 a.C., ou seja, há mais de 2 300 anos, mostrou que existem infinitos números primos.

Proposição 1 (Euclides): Todo número natural $a > 1$, ou é primo, ou se escreve como produto de números primos.

Proposição 2: Sejam a, m e n números naturais com m e n primos e $m \neq n$. Se a é múltiplo de m e a é múltiplo de n, então ele será múltiplo também do produto mn.

Exercícios para o Nível 1 – 6º e 7º anos

1) Cinco tartarugas apostaram uma corrida em linha reta e na chegada a situação foi a seguinte: Sininha está 10 m atrás de Olguinha e 25 m à frente de Rosinha que está 5 m atrás de Elzinha que está 25 m atrás de Pulinha. Qual foi a ordem de chegada?

2) O algarismo da unidade do número $1 \times 3 \times 5 \times 79 \times 97 \times 113$ é?
(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

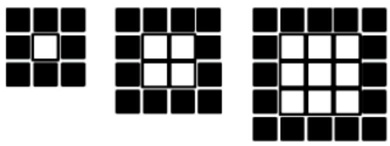
3) Complete os quadradinhos com os números 1, 2, 3, 5, 6.

$$(\square + \square - \square) \times \square \div \square = 4$$

4) Uma professora tem 237 balas para dar a seus 31 alunos. Qual é o número mínimo de balas a mais que ela precisa conseguir para que todos seus alunos recebam a mesma quantidade de balas, sem sobrar nenhuma?

5) Uma sequência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, sendo o primeiro formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo por quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos e assim, sucessivamente, como indica a figura. Se numa sequência de mosaicos formada de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?

(a) 55 (d) 85
(b) 65 (e) 100
(c) 75



6) Consideremos um conjunto formado por 10 números naturais diferentes. Se calcularmos todas as diferenças entre esses números, podemos afirmar que pelo menos uma dessas diferenças é um múltiplo de 9?

7) Sofia brinca de escrever todos os números de 4 algarismos diferentes que se pode escrever com os algarismos 1, 2, 4 e 7. Ela soma 3 desses números – todos diferentes – e obtém 13.983. Quais são esses 3 números?

8) Uma doceira foi ao mercado comprar ovos para fazer 43 bolos, todos com a mesma receita, que gasta menos de 9 ovos. O vendedor repara que se tentar embrulhar os ovos que a doceira comprou em grupos de 2 ou de 3 ou de 4 ou de 5 ou de 6 ovos, sempre sobra 1 ovo. Quantos ovos ela usa em cada bolo? Qual o menor número de ovos que a doceira vai gastar para fazer os 43 bolos?

9) Pensei em 2 números de dois algarismos, que não possuem algarismos em comum, sendo um o dobro do outro. Além disso, os algarismos do menor número são a soma e a diferença dos algarismos do maior número. Quais são os números?

10) Os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 foram usados, cada um uma única vez, para escrever um número de 5 algarismos *a b c d e*, tal que: *a b c* é divisível por 4, *b c d* por 5, e *c d e* por 3. Encontre esse número.

Exercícios para o Nível 2 – 8º e 9º anos

1) Sejam A, B e C algarismos diferentes de zero tais que $(AB)^2 = CAB$, isto é, o número de dois algarismos AB elevado ao quadrado dá o número de três algarismos CAB. Determine o valor de A + B + C.

2) O algarismo da unidade do número $1 \times 3 \times 5 \times 79 \times 97 \times 113$ é?
(a) 1 (b) 3 (c) 5 (d) 7 (e) 9

3) Observe as seguintes igualdades:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 & = & 25 & = & 5^2 \\ 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 & = & 121 & = & 11^2 \\ & \vdots & & & \\ 10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1 & = & 17\,161 & = & 131^2 \\ & \vdots & & & \end{array}\right.$$

Será que isso é sempre verdadeiro? Isto é: o produto de quatro números inteiros consecutivos, mais 1, é sempre um quadrado perfeito?

4) O diretor da escola decidiu tirar uma foto dos formandos de 2 008. Ele colocou os alunos em filas paralelas, todas com o mesmo número de alunos, mas essa disposição era muito larga para o campo de visão de sua máquina fotográfica. Para resolver esse problema, o diretor reparou que bastava tirar um aluno por fila e colocá-los numa nova fila. Essa disposição não agradou o diretor porque a nova fila tinha 4 alunos a menos que as outras. Ele decide então tirar mais 1 aluno por fila colocando-os na nova fila que ele criou, e constata que assim todas as filas ficam com o mesmo número de alunos, e finalmente tira a foto. Quantos alunos apareceram na foto?

5) Na adição ao lado, letras iguais representam o mesmo algarismo e letras diferentes algarismos diferentes. Encontre o número *ABCDE*.

$$\begin{array}{r} ABCDE \\ BCDE \\ CDE \\ DE \\ E \\ \hline AAAAA \end{array}$$

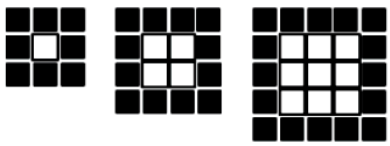
6) Cada um dos cinco números abaixo tem 100 algarismos, e é formado pela repetição de um ou dois algarismos:
N_1 = 333333...3 N_2 = 666666...6 N_3 = 151515...15 N_4 = 212121...21 N_5 = 272727...27
Algum destes números é um quadrado perfeito?

7) Os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 foram usados, cada um uma única vez, para escrever um número de 5 algarismos *a b c d e*, tal que: *a b c* é divisível por 4, *b c d* por 5, e *c d e* por 3. Encontre esse número.

8) O número $3^{444} + 4^{333}$ é divisível por 5?

9) Uma sequência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, sendo o primeiro formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo por quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos e assim, sucessivamente, como indica a figura. Se numa sequência de mosaicos formada de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?

(a) 55 (d) 85
(b) 65 (e) 100
(c) 75



10) Qual é o quociente de 50^{50} por 25^{25}?
(a) 25^{25} (b) 10^{25} (c) 100^{25} (d) 2^{25} (e) 2×25^{25}

Exercícios para o Nível 3 – Ensino Médio

1) Sejam A, B e C algarismos diferentes de zero tais que $(AB)^2 = CAB$, isto é, o número de dois algarismos AB elevado ao quadrado dá o número de três algarismos CAB. Determine o valor de A + B + C.

2) Observe as seguintes igualdades:
$$\begin{cases} 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 & = & 25 & = & 5^2 \\ 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 & = & 121 & = & 11^2 \\ & \vdots & & & \\ 10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1 & = & 17\,161 & = & 131^2 \\ & \vdots & & & \end{cases}$$

Será que isso é sempre verdadeiro? Isto é: o produto de quatro números inteiros consecutivos, mais 1, é sempre um quadrado perfeito?

3) Uma cidade ainda não tem iluminação elétrica, portanto, nas casas usam-se velas à noite. Na casa de João, usa-se uma vela por noite, sem queimá-la totalmente, e com quatro desses tocos de velas, João fabrica uma nova vela. Durante quantas noites João poderá iluminar sua casa dispondo de 43 velas?

4) Qual é o menor número inteiro positivo N tal que N/3, N/4, N/5, N/6 e N/7 sejam todos números inteiros?
(a) 420 (b) 350 (c) 210 (d) 300 (e) 280

5) Digite numa calculadora um número qualquer de 3 algarismos. Em seguida, digite o mesmo número, obtendo assim um número de 6 algarismos da forma *a b c a b c*. Divida esse número por 7, divida o resultado por 11 e, finalmente, divida o número obtido por 13. O que aconteceu? Por que você obteve este resultado?

6) Cada um dos cinco números abaixo tem 100 algarismos, e é formado pela repetição de um ou dois algarismos:
$N_1 = 333333...3$ $N_2 = 666666...6$ $N_3 = 151515...15$ $N_4 = 212121...21$ $N_5 = 272727...27$
Algum destes números é um quadrado perfeito?

7) Os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 foram usados, cada um uma única vez, para escrever um número de 5 algarismos a b c d e, tal que: a b c é divisível por 4, b c d por 5, e c d e por 3. Encontre esse número.

8) Qual é o quociente de 50^{50} por 25^{25}?
(a) 25^{25} (b) 10^{25} (c) 100^{25} (d) 2^{25} (e) 2×25^{25}

9) O número $3^{444} + 4^{333}$ é divisível por 5?

10) Mostre que se o produto $N = (n+6m)(2n+5m)(3n+4m)$ é múltiplo de 7, com m e n números naturais, então N é múltiplo de $7^3 = 343$.